

I

- (1) 初めに物体はx軸の正の方向へ進むが、ベルトの速度を超えることはできず、正の方向へ静止摩擦力を受ける。それがばねから受ける負の方向の力とつり合うことができる内は等速度運動する。従って

$$\mu mg = k X_1$$

が条件。よって

$$\text{答 } T_1 = \frac{X_1}{V_0} = \frac{\mu mg}{kV_0}$$

$$\text{答 } X_1 = \frac{\mu mg}{k}$$

- (2) 時刻 $t = T_1$ [s] を過ぎると物体の速度はベルトの速度を下回り、正の方向へ動摩擦力を受ける。物体の加速度のx軸方向の成分を a [m/s²] とすると、運動方程式のx軸方向の成分は

$$ma = -kx + \mu' mg = -k\left(x - \frac{\mu' mg}{k}\right)$$

となる。これは時刻 $t = T_2$ までは運動が

$$x = \frac{\mu' mg}{k}$$

を中心とする単振動に従うことを表す。位置が最大あるいは最小になるとき速度は0だから、力学的エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}k\left(X_1 - \frac{\mu' mg}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(X_0 + A - \frac{\mu' mg}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(X_0 - A - \frac{\mu' mg}{k}\right)^2.$$

これより

$$\text{答 } X_0 = \frac{\mu' mg}{k}$$

$$\text{答 } A = \sqrt{\frac{mV_0^2}{k} + \left[\frac{(\mu - \mu')mg}{k}\right]^2}$$

- (3) 力学的エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}k(X_1 - X_0)^2 = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}k(X_2 - X_0)^2$$

となるが、運動エネルギーは等しいので位置エネルギーも等しく、 $X_2 - X_0 = \pm(X_1 - X_0)$ 、時刻 $t = T_1$ [s] を過ぎてから物体の速度が初めて V_0 に等しくなるとき $X_2 - X_0 = -(X_1 - X_0)$ であり、

$$\text{答 } X_2 = 2X_0 - X_1 = (2\mu' - \mu) \frac{mg}{k}$$

- (4) 時刻 $t = T_1$ と時刻 $t = T_2$ で運動エネルギーが等しいので、時刻 $t = T_1$ から時刻 $t = T_2$ までに物体がばねから受ける仕事 W と、その間に物体が動摩擦から受ける仕事の和は0になる。動摩擦は常に大きさ $\mu' mg$ で正の方向に働くので、物体が動摩擦から受ける仕事は

$$\mu' mg(X_2 - X_1)$$

従って

$$\text{答 } W = \mu' mg(X_1 - X_2) = 2\mu'(\mu - \mu') \frac{(mg)^2}{k}$$

(5) 図(c)が適切。

理由：時刻 T_1 まではばねの力と摩擦力が釣り合う。 T_1 の直後はばねの力が上回って $F < 0$ だが、その後時刻 T_2 までは $x = X_0$ を中心とする単振動に従う。 $x < X_0$ になると $F > 0$ となり、物体が受ける力積が0になる T_2 で再び速度が V_0 になって力が釣り合う。

他の図が適切でない理由：

図(a)は $t = T_1$ のときに合力が正の値になっている。

図(b)は $t = T_2$ 以前に速度が V_0 に戻っている。

図(d)は $t = T_2$ での速度が V_0 まで戻っていない。

II

- (1) 直方体 A が板から、直方体 B が直方体 A から受ける静止摩擦力をそれぞれ f_A 、 f_B 、糸の張力を T とすると、直方体 A、B において斜面に平行な方向の力のつり合いより下記の式が成り立つ。

$$\text{直方体 A : } 2Mg \sin \theta + f_B = f_A + T$$

$$\text{直方体 B : } Mg \sin \theta = f_B$$

上記 2 式より f_B を消去すると、 $3Mg \sin \theta = f_A + T$ となる。

直方体 A が板から受ける垂直抗力 N_A は $3Mg \cos \theta$ 、糸の張力 T は mg である。

$\theta = \theta_0$ のときの静止摩擦係数 μ_A はこれらの式から下記のように求められる。

$$3Mg \sin \theta_0 = f_A + T = \mu_A N_A + T = 3\mu_A Mg \cos \theta_0 + mg$$

よって

$$\text{答 } \mu_A = \tan \theta_0 - \frac{m}{3M \cos \theta_0}$$

- (2) $\theta = \theta_1$ のとき、直方体 A が板から受ける垂直抗力 N_A は $3Mg \cos \theta_1$ 、直方体 B が直方体 A から受ける垂直抗力 N_B は $Mg \cos \theta_1$ である。

よって

$$\text{答 } f'_A = \mu'_A N_A = 3\mu'_A Mg \cos \theta_1$$

$$\text{答 } f'_B = \mu'_B N_B = \mu'_B Mg \cos \theta_1$$

- (3) 直方体 A の加速度を a_A とすると、直方体 A、C についての運動方程式は下記のように書ける。

$$\text{直方体 A : } 2Ma_A = 2Mg \sin \theta_1 + f'_B - f'_A - T$$

$$\text{直方体 C : } ma_A = T - mg$$

上記 2 式から T を消去し、(2) の結果を代入し整理すると下記の様になる。

$$2Ma_A = 2Mg \sin \theta_1 + f'_B - f'_A - ma_A - mg$$

$$(2M + m)a_A = 2Mg \sin \theta_1 + f'_B - f'_A - mg = 2Mg \sin \theta_1 + (\mu'_B - 3\mu'_A)Mg \cos \theta_1 - mg$$

よって

$$\text{答 } a_A = \frac{2Mg \sin \theta_1 + (\mu'_B - 3\mu'_A)Mg \cos \theta_1 - mg}{2M + m}$$

- (4) 直方体 B の加速度を a_B とすると、直方体 B の運動方程式は下記のように書ける。

$$Ma_B = Mg \sin \theta_1 - f'_B$$

(2) の結果を代入し整理すると下記の様になる。

$$Ma_B = Mg \sin \theta_1 - \mu'_B Mg \cos \theta_1$$

よって

$$\text{答 } a_B = g \sin \theta_1 - \mu'_B g \cos \theta_1$$

III

(1) 点 B での小球の速さを v_B とすると, エネルギーの保存から

$$mgr(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}mv_B^2$$

点 B で抗力 N_B が

$$N_B = mg\cos\theta - \frac{mv_B^2}{r} = mg(3\cos\theta - 2) \geq 0$$

であることが条件

答 $\cos\theta \geq \frac{2}{3}$

(2) 水平面に最初に小球が達したときの小球の速さを v とすると

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2, \quad v = \sqrt{2gr}$$

水平方向の運動量の保存から

$$mv = m\sqrt{2gr} = (M + m)V$$

エネルギーの保存より

$$mgr = mgh + \frac{1}{2}(M + m)V^2$$

これらより

答 $h = \frac{M}{M + m}r$

答 $V = \frac{m}{M + m}\sqrt{2gr}$

(3) 水平面に戻ったときの小球および台の速度を v' , V' とすると (右方向を正), 水平方向の運動量の保存から

$$m\sqrt{2gr} = mv' + MV'$$

$$v'^2 = \left(\sqrt{2gr} - \frac{M}{m}V'\right)^2$$

エネルギーの保存から

$$mgr = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$$

$$v'^2 = 2gr - \frac{M}{m}V'^2$$

v' を消去して

$$\left(\frac{M}{m}\right)^2 V'^2 - \frac{2M}{m}\sqrt{2gr}V' + 2gr = 2gr - \frac{M}{m}V'^2$$

$$\frac{M}{m} \left(\frac{M+m}{m} \right) V' - \frac{2M}{m} \sqrt{2gr} = 0$$

$$V' = \frac{2m}{M+m} \sqrt{2gr}$$

$$v' = \left| \sqrt{2gr} - \frac{M}{m} V' \right| = \frac{M-m}{M+m} \sqrt{2gr}$$

$$\text{答 } v' = \frac{M-m}{M+m} \sqrt{2gr}$$

$$\text{答 } V' = \frac{2m}{M+m} \sqrt{2gr}$$

(4) エネルギーの保存より

$$mgr(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m \times 2gr \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2$$

$$\text{答 } M = \frac{1 + \sqrt{1 - \cos\theta}}{1 - \sqrt{1 - \cos\theta}} m$$

IV

考える音波の伝播速度（音速） a ，周波数 f ，波長 λ の関係は， $a = k\sqrt{T}$ ， $\lambda = \frac{a}{f} = k \frac{\sqrt{T}}{f}$ 。

- (1) 開口端補正は考慮しない。最初の共鳴（定在音波）は，管の左端にその腹が位置し， $1/4$ 波長だけ右にずれた位置に節を持つ。その位置が求めるピストンの位置 l_0 である。

$$\text{答 } l_0 = \frac{\lambda_0}{4} = \frac{1}{4} k \frac{\sqrt{T_0}}{f_0}$$

次の共鳴のためにもう半波長必要。

$$d_0 - l_0 = \frac{\lambda_0}{2}$$

$$\text{答 } d_0 = \frac{3}{4} \lambda_0 = \frac{3}{4} k \frac{\sqrt{T_0}}{f_0}$$

- (2) 周波数を f_1 ($> f_0$)に変化させた。それに対応する波長は $\lambda_1 = k \frac{\sqrt{T_0}}{f_1}$ ($< \lambda_0$)になる。

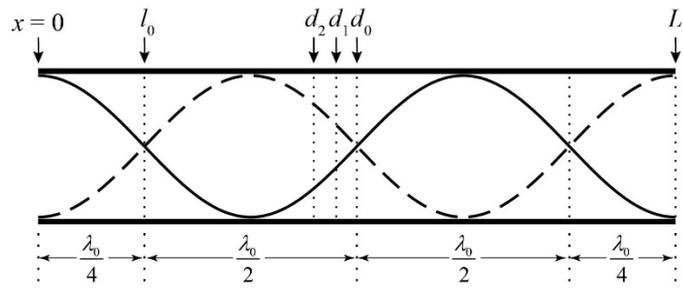
$$\text{答 } d_1 = \frac{3}{4} \lambda_1 = \frac{3}{4} k \frac{\sqrt{T_0}}{f_1} \quad (< d_0)$$

- (3) 周辺温度を T_1 ($< T_0$)に変化させた。それに対応する波長は $\lambda_2 = k \frac{\sqrt{T_1}}{f_1}$ ($< \lambda_1$)になる。

$$\text{答 } d_2 = \frac{3}{4} \lambda_2 = \frac{3}{4} k \frac{\sqrt{T_1}}{f_1} \quad (< d_1 < d_0)$$

- (4) f_0 と T_0 に戻したので，共鳴するはずの位置は $x = d_0$ に戻ったはず。最後にピストンを右に動かしていく直前の座標 d_2 は，(2)と(3)の結果から， d_0 よりも左側に位置する。2回共鳴が観測されたので， d_0 の位置で1回，そこから $\lambda_0/2$ 右側に移動したところでもう1回，共鳴が発生しただろう。ピストンが抜けた際の最後の共鳴は，定在音波の腹が管の開口右端に位置したことを示している。要するに，管の右端は，2回目の共鳴位置からさらに $\lambda_0/4$ 右側に位置しただろう。図を描けば理解しやすい。

$$\text{答 } L = d_0 + \frac{\lambda_0}{2} + \frac{\lambda_0}{4} = \frac{3}{2} \lambda_0 = \frac{3}{2} k \frac{\sqrt{T_0}}{f_0}$$



V

(1) 力のつり合いより、

$$p_1 S = p_0 S + \rho b S g$$

したがって、

$$\therefore p_1 = p_0 + \rho b g$$

$$\text{答 } \underline{p_1 = p_0 + \rho b g}$$

理想気体の状態方程式より、

$$p_1 a S = R T_1$$

$$\therefore T_1 = \frac{p_1 a S}{R} = \frac{(p_0 + \rho b g) a S}{R}$$

$$\text{答 } \underline{T_1 = \frac{(p_0 + \rho b g) a S}{R}}$$

(2) 定圧変化なので、 $\therefore W_{12} = p_1 \Delta V = (p_0 + \rho b g) S x$

一方、状態2における温度を T_2 とすると、シャルルの法則より

$$\frac{S a}{T_1} = \frac{S(a+x)}{T_2}$$

$$\therefore T_2 = \frac{S(a+x)T_1}{S a} = \frac{S(a+x)(p_0 + \rho b g)}{R}$$

また

$$Q_{12} = \frac{5}{2} R \Delta T = \frac{5}{2} R (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} R \left(\frac{S(a+x)(p_0 + \rho b g)}{R} - \frac{(p_0 + \rho b g) a S}{R} \right) = \frac{5}{2} (p_0 + \rho b g) S x$$

$$\text{答 } \underline{W_{12} = (p_0 + \rho b g) S x}$$

$$\text{答 } \underline{Q_{12} = \frac{5}{2} (p_0 + \rho b g) S x}$$

(3) 状態4における気体の圧力 p_4 は力のつり合いより

$$p_4 S = p_0 S + \rho(b-y) S g$$

$$\therefore p_4 = p_0 + \rho(b-y) g$$

また、状態3、4における気体の体積 V_3 、 V_4 はそれぞれ

$$\therefore V_3 = (c+a) S$$

$$\therefore V_4 = (c+a+y) S$$

したがって、仕事 W は p - V 図の面積なので

$$\begin{aligned}\therefore W_{34} &= \frac{(p_3 + p_4)(V_4 - V_3)}{2} = \frac{(p_0 + \rho bg + p_0 + \rho(b - y)g)((c + a + y)S - (c + a)S)}{2} \\ &= \frac{(2p_0 + 2\rho bg - \rho yg)yS}{2}\end{aligned}$$

$$\text{答 } W_{34} = \underline{\underline{\frac{(2p_0 + 2\rho bg - \rho yg)yS}{2}}}$$

(4) 状態 5 から状態 6 は定圧変化であり、圧力は p_0 である。

状態 5, 6 における温度をそれぞれ T_5 , T_6 とする。

状態方程式より、

$$T_5 = \frac{p_0(a + b + c)S}{R}$$

$$T_6 = \frac{p_0aS}{R}$$

$$Q_{56} = -\frac{5}{2}R\Delta T = -\frac{5}{2}R(T_6 - T_5) = \frac{5}{2}R \frac{p_0(a + b + c - a)S}{R} = \frac{5}{2}p_0(b + c)S$$

$$\text{答 } Q_{56} = \underline{\underline{\frac{5}{2}p_0(b + c)S}}$$

VI

- (1) 導体棒に流れる電流 I は, $I = \frac{V}{r}$

導体棒には重力, 磁界から受ける力, 抗力が働いてつりあっている。したがって

$$\text{答 } \tan \theta_0 = \frac{IBd}{mg} = \frac{VBd}{mgr}$$

- (2) 導体棒の速度を v とすると力学的エネルギー保存則により,

$$mgL(1 - \cos \theta_1) = mgL(1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{答 } v = \sqrt{2gL(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)}$$

磁界に垂直な速度成分は $v \cos \theta_2$ であるので, 誘導起電力を V' とすると,

$$\text{答 } V' = Bdv \cos \theta_2 = Bd \cos \theta_2 \sqrt{2gL(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)}$$

- (3) 最も適当な図は (C)。抵抗 R で誘導電流によるジュール熱が発生し, エネルギーを損失することで, 振動の振幅が減衰する。原点 O を通過する導体棒の速さも減少し, 誘導電流も減衰して小さくなっていく。